518. $X(t)X(s)=X(t+s)$ ニ就イテ

伊　藤　　清（東大學生）

定理 *Vollständig* ナ *metrisch* ナ *lin. Ring* ノ中ニ實數 t ヲ *parameter* トスル群 $\{X(t)\}$ ガアッテ

$$X(0)=E$$

$$X(t)X(s)=X(t+s)$$

$X(t)$ ハ t ニツイテ連續

ナラバ、$X(t)$ ハ t ニツイテ微分可能デ且ツ $X(t)=e^{tA}$ トカケル。

コレハ南雲氏ノ定理デ次ノ論文ニソノ證明ガアル。（共ニ輯

報 1936 vol. 13 No. 1 ニアル)

M. Wagumo: *Einige analytische Untersuchung in linearen metrischen Ringen* §5

K. Yosida: *On the group embedded in the metrical complete ring* §7.

コヽニ述ベルノハ、コノ別証デス。私ハ初メモツ少シ強イ假定ノモトニ、同ジヤウナ定理ヲ証明シタノデスが(Hilbert空間ノ *lin. Operator* ノ群ニツイテ)、三村氏ニ上掲ノ論文ノアルコトヲ教ヘテ頂イテ、上ノ定理ノ証明ニナルヤウニ書キナホシタノデス。

"*vollständig* + *metrisch* + *lin. Ring*" ノ定義ハ上掲ノ論文ニアリマスカラ、コヽデハ只後ニツカフノニ便利ノタメ *metrik* ニ関スル部分ダケトリ出シテ書キマス

(1) $|X| \geq 0$ $|X| = 0$ ナラバ $X = 0$

(2) $|X+Y| \leq |X| + |Y|$

(3) $|XY| \leq |X||Y|$

(4) $|aX| = |a||X|$ (a ハ複素数)

上述ノ定理デイフ *Ring* ヲ $\mathfrak{R}$ デアラハシ群 $\{X(t)\}$ ヲ $\mathcal{G}$ デアラハス。

証明ニ先ダツテ三ツノ *Lemma* ヲノベル。

Lemma 1. $X(t), Y(t) \in \mathfrak{R}$

$X(t)$ が $\alpha \leq t \leq \beta$ デ有界変動

$Y(t)$ が $\alpha \leq t \leq \beta$ デ連続

ナラバ

$$\int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\,d\,X(t) = \lim_{\substack{d\to 0 \\ d=\mathrm{Max}|t_\nu - t_{\nu-1}| \\ 1\le\nu\le n}} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta \\ t_{\nu-1}<\tau_\nu<t_\nu}}^{n-1} Y(\tau_\nu)\left(X(t_\nu)-X(t_{\nu-1})\right)$$

ガ存在スル。

証明. 實函數ノ Stieltjes ノ積分ノ場合ト同様ニ出來ル。（$\mathcal{R}$ ノ metrik ノ性質 (1) (2) (3) (4) 參照）

Lemma 2.

$$X(t) \in \mathcal{G}$$

$\alpha \le t \le \beta$ デハ

$$|X(t)-X(s)| \le M(\alpha\beta)\,|t-s|$$

トナルヤウニ $M(\alpha\beta)$ ガアル。

証明. $|X(t)-X(s)| = |(X(t-s)-E)X(s)| \le |X(t-s)-E|\,|X(s)|$

$$\le |X(t-s)-E|\, m(\alpha\beta)$$

コヽニ $m(\alpha\beta) = \underset{\alpha\le s\le\beta}{\mathrm{Max}} |X(s)|$. コレハ $X(t)$ ノ連續性ニヨリタシカニ存在スル。

$|X(t)-E| \le m'(\alpha\beta)\,|t|$ ナル $m'(\alpha\beta)$ ノ存在ヲイヘバ

$M(\alpha\beta) = m\,m'$ トスレバ Lemma 2 ハ証明サレタコトニナル。

サテ $X(t)$ ノ連續性ヨリ $|t| < \delta$ ナルカギリ $|X(t)-E| < \frac{1}{2}$ ナル如キ δ ガアル。

$t \neq 0$ ナラバ $\left|\dfrac{X(t)-E}{t}\right| = \left|\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \dfrac{X(\nu\frac{t}{n}) - X(\overline{\nu-1}\frac{t}{n})}{\frac{t}{n}}\right|$

$$=\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)\right|$$

$$=\left|\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)}{n}\right| \text{------------} (1)$$

然ルニ

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E\right)\right|$$

$$\leqq\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left|X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E\right|$$

$$|t|<\delta \quad \therefore \left|\frac{t}{n}\,\overline{\nu-1}\right|<\delta \quad \therefore \left|X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E\right|<\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E\right|<\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}X\left(\overline{\nu-1}\,\frac{t}{n}\right)-E=K$ トオクト $|K|<\frac{1}{2}$

故ニ (1) ヨリ

$$\left|\frac{X(t)-E}{t}\right|=\left|\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}(E+K)\right|$$

$$=\left|\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}+\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}K\right|$$

$$\geqq\left|\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}\right|-\left|\frac{X\left(\frac{t}{n}\right)-E}{\frac{t}{n}}\right||K| \quad \left(\begin{array}{l}\text{metrik ノ性質}\\ (2)\,(3)\text{ ヨリ}\end{array}\right)$$

$|\kappa|<\frac{1}{2}$ ナル故 $\qquad \geq \frac{1}{2}\left|\dfrac{X(\frac{t}{n})-E}{\frac{t}{n}}\right|$

$$\therefore \quad \left|\frac{X(\frac{t}{n})-E}{\frac{t}{n}}\right| \leq 2\left|\frac{X(t)-E}{t}\right|$$

故ニ $\frac{\delta}{2}\leq|t|\leq\delta$ ナルカギリ

$$\left|\frac{X(\frac{t}{n})-E}{\frac{t}{n}}\right| \leq 2 \max_{\frac{\delta}{2}\leq|t|\leq\delta}\left|\frac{X(t)-E}{t}\right|$$

$$\leq 2 \max_{\frac{\delta}{2}\leq|t|\leq\max(\delta,|\alpha||\beta|)}\left|\frac{X(t)-E}{t}\right| = m'(\alpha\beta)$$

$X(t)$ ガ連続ナル故 $\frac{X(t)-E}{t}$ モ $|t|\geq\frac{\delta}{2}\,(>0)$ ナラバ勿論

連続.

故ニ上ノ $\max$ ハ存在スル。

$n=1,2,3,\text{-------}$ トオイテ行ケバ

$$\frac{2\delta}{n+1}-\frac{\delta}{n}=\frac{(n-1)\delta}{n(n+1)}>0 \text{ ナル故}$$

$0<|t|<\frac{\delta}{2}$ ナラバ $\quad \left|\frac{X(t)-E}{t}\right| \leq m'(\alpha\beta)$

$\frac{\delta}{2}\leq|t|\leq\max(\delta,|\alpha|,|\beta|)$ ナラバ

$$\left|\frac{X(t)-E}{t}\right| \leq \frac{m'(\alpha\beta)}{2} \leq m'(\alpha\beta)$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\leq t\leq\beta\\ t\neq 0\end{array}\right\} \text{ ナラバ } \left|\frac{X(t)-E}{t}\right| \leq m'(\alpha\beta)$$

$\alpha\leq t\leq\beta$ ナラバ $\quad |X(t)-E| \leq m'(\alpha\beta)\,|t|$

コレデ *Lemma* 2 ノ証明ハ終ッタ。

Lemma 3.

$$X(t) \in \mathfrak{G} \text{ ナラバ } \quad L(s)=\int_0^s X^{-1}(t)\,dX(t) \text{ ガ存在シ，且ツ}$$

$$L(s)=sL(1)$$

証明：——

(1)　先ヅ $L(s)$ ノ存在ヲ示ス。$\mathfrak{G}$ ノ定義ヨリ $X^{-1}(t)=X(-t)$ ナル故 $X^{-1}(t)$ ハ連続.

Lemma 2 ヨリ $X(t)$ ハ $[0s]$ デ有界変動。故ニ *Lemma* 1 ニヨリ $L(s)$ ハ存在スル。

(2)　$$L(s+s')=\int_0^{s+s'} X^{-1}(t)\,dX(t)$$

$$=\int_0^{s} X^{-1}(t)\,dX(t)+\int_0^{s+s'} X^{-1}(t)\,dX(t)$$

$$\int_0^{s} X^{-1}(t)\,dX(t)=L(s)$$

$$\int_0^{s+s'} X^{-1}(t)\,dX(t)=\int_{t=0}^{s'} X^{-1}(s+t)\,dX(s+t)$$

$$=\int_{t=0}^{s'} X(-s-t)\,dX(s)\,X(t)$$

$$=\int_{t=0}^{s'} \underline{X(-s-t)\,X(s)}\,dX(t)$$

$$=\int_{t=0}^{s'} X^{-1}(t)\,dX(t)=L(s')$$

$$\therefore\quad L(s+s')=L(s)+L(s')$$

(3)　(2) ヨリ s ガ有理数ナラバ　$L(s)=sL(1)$

(4)　今、$L(s)$ノ連續性ヲ証明スレバ、sガ無理數デモ $L(s)=sL(1)$トナル。

$L(s)$ノ連續性ヲ示サウ。

$|\sigma|<1$ナラバ $|L(s+\sigma)-L(s)|\leq M(-1,1)|\sigma|$

コヽニ$M(-1,1)$ハLemma 2デノベタ$M(\alpha,\beta)$ニ於テ$\alpha=-1$, $\beta=1$ノトキノ値デアル。上ノ不等式ハ實函數ノStiltjesノIntegralノ時ト同様ニ出ル。

$\therefore$　$\sigma\to 0$ナラバ　$|L(s+\sigma)-L(s)|\to 0$

コレダケヲ準備トシテ最初ノベタ定理ノ証明ヲスル。$X(t)$ガ微分可能ナコトヲイヘバ $X(t)=e^{tA}$トカケルコトハ、スグ出ルカラ、コヽデハ$X(t)$ノ微分可能性ダケヲ示ス。

$$L(1)=A$$

ト書ク。

先ヅ $t=0$ ニ於ケル微分可能性ヲ示サウ。

Lemma 3 ニヨリ

$$L(s)=sA$$

$$\left|\int_0^s X(-t)\,dX(t)-\int_0^s dX(t)\right|=\left|\int_0^s \bigl(X(-t)-E\bigr)\,dX(t)\right|$$

$t\to 0$ ノトキ　$X(-t)\to E$

故ニ $|t|<\delta(\varepsilon)$ナルカギリ

$$|X(-t)-E|<\varepsilon$$

ナル如キ$\delta(\varepsilon)$ガアル。

$$|s|<\underset{<1}{\delta(\varepsilon)}\text{ナラバ}\quad\left|\int_0^s X(-t)\,dX(t)-\int_0^s dX(t)\right|\leq\varepsilon M(-1,1)|s|$$

即チ

$$\left|L(s)-(X(s)-X(0))\right| \leq \varepsilon M(-1,1)|s|$$

$L(s)=sA$ ナル故

$$|sA-(X(s)-E)| \leq \varepsilon M(-1,1)|s|$$

$$\begin{array}{l} 0<|s|<\delta(\varepsilon) \\ \quad <1 \end{array} \quad \left|\frac{X(s)-E}{s}-A\right| < \varepsilon M(-1,1)$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{X(s)-E}{s}=A$$

即チ　$X(s)$ ハ　$s=0$ デ微分可能。

一般ニ

$$\lim_{s\to 0}\frac{X(t+s)-X(t)}{s}=X(t)\lim_{s\to 0}\frac{X(s)-E}{s}=X(t)A$$

―――― 終リ ――――